注入のある凝集系の厳密解

神戸大・理　　高安秀樹

自然界には沢山のフラクタル構造が存在することがわかってきたが、おもしろいのはそれらの多くが熱平衡から遠く離れた環境にあることである。破壊、凝集、乱流など、どの現象にもはっきりした時間の矢が存在する。なぜ、不可逆な系にフラクタルが多く見られるのか、という一般的な問題を理解するための手がかりを得るため、ここでは、まず、非常に単純化されたモデルを導入し、理論的に解析する。そして、その結果から不可逆性とフラクタルの一般的な関係を考察する。

不可逆な凝集をするような粒子が１次元座標軸上に等間隔に存在する状況を考える。各粒子は単位時間ごとに、右または左に単位間隔の半分の距離だけランダムに移動する。その結果２つの粒子が衝突したときには、両者は凝集し、ひとつの粒子になる。粒子には”電荷”のような加算的なスカラー量が付随するものとし、電荷m_1とm_2の粒子が凝集したときには、凝集した粒子の電荷はm_1+m_2となる。さて、この系は粒子の注入がなければ、粒子の数は単調に減少してしまう。そこで、系を定常化するため、小さな電荷を持った粒子をランダムに注入し続けることにする。時刻tにおける粒子の電荷の分布に対する特性関数は、次の方程式を満たすことが示せる。

$$Z_r(\rho,t+1)=\frac{\Phi(\rho)^r}{4}\left[Z_{r+1}(\rho,t)+2Z_r(\rho,t)+Z_{r-1}(\rho,t)\right]$$

ただし、ここで　$Z_r(\rho,t)$ はr体の特性関数で次のように定義される。

$$Z_r(\rho,t)=\left\langle \exp\left[i\rho\left(m(1,t)+m(2,t)+\cdots+m(r,t)\right)\right]\right\rangle$$

また、$\Phi(\rho)=1+i\langle I\rangle\rho-\langle I^2\rangle\frac{\rho^2}{2}+\cdots$は注入に対する特性関数である。統計物理学で必ず出会うように、１体を得るには２体、２体を得るには３体、という具合いに無限個の多体効果を同時に解かなければならない。

好運なことに、この方程式の定常解は連分数のテクニックを使ってρの絶対値が小さいところでは厳密に評価することができる。その結果得られる定常分布は、次のようになる。

$$p(m) \propto m^{-4/3} \quad , \langle I \rangle \neq 0 \text{ のとき}$$

$$p(m) \propto m^{-5/3} \quad , \langle I \rangle = 0 \text{ のとき}$$

$$p(m) \propto m^{-2} \quad , \text{対発生のとき}$$

ここで、対発生というのは、絶対値が等しく符号が逆の電荷を持った粒子を隣合わせに注入する場合を意味する。

以上は１次元の厳密な評価であるが、多体の特性関数を１体の積で置き換えるような平均場近似を用いた場合の解は次のようになる。

$$p(m) \propto m^{-3/2} \quad , \langle I \rangle \neq 0 \text{ のとき}$$

$$p(m) \propto m^{-2} \quad , \langle I \rangle = 0 \text{ のとき}$$

$$p(m) \propto m^{-2} \quad , \text{対発生のとき.}$$

１次元空間の解が平均場と異なるのは常識的だが、対発生の場合には平均場と１次元の解が一致することは興味深い。臨界次元が系のダイナミックスだけでなく、注入の型にも依存していることを暗示しているからである。

このように、絶えず注入のある系はベキ分布を定常分布とすることがわかったが、この定常状態は極めて安定で、どんな初期状態からスタートしてもこの定常解に収束することが示せる。また、定常解に収束するときの緩和の関数型も解析的に求めることができる。緩和の関数型も定常分布と同様に、注入の詳細には依らず、平均値が０であるかどうか、対発生型であるかどうかだけで決まり、極めて一般性が高い。

さて、他にはないこの系の重要な特徴は、注入は絶えずあるが、抜き取りは全くないにも関わらず、定常的な分布が存在することである。注入があるおかげで、有限時間では電荷の平均値や分散が時間とともに増大するので、常識的には定常状態は存在しないのではないかと考えやすい。しかし、その常識は間違っている。この場合には、定常分布の平均値や分散は無限大なので、そこに漸近するためには平均値や分散は発散する傾向を示さなければならないのである。例えば、ある変数ｖがガウス分布するとき（ $p(v) \propto e^{-v^2}$ ）、ｖの逆２乗の期待値、

を計算すれば、ｖの分布がガウスに近付くにつれてその量が発散する現象が見られるはずである。しかし、だからといってガウス分布の定常解を疑う人はいない。

つまり、注入のある凝集系では、平均や分散という量は、系を特徴づけるのに適切な量ではないというだけのことである。分布関数そのものが確かに時間と共に定常解に漸近していることは数値計算によっても確かめられている。

これまで物理学が扱ってきた定常状態は大きく3つに分類することができる。外部から遮断された閉じた系、熱浴と接した熱平衡開放系、そして、散逸と注入がバランスした散逸系である。ここで議論した注入のある散逸系は、注入はあるが散逸は全くないので、これらのどれにも当てはまらないような定状状態であるということができる。仮に、これを第4の定状状態ということにしよう。第4の定状状態では平均値や分散というこれまでの物理学ではいつでも重要な意味を持っていた量が発散している。そして、統計の中心となる分布は、指数分布やガウス分布ではなく、ベキ分布（正確には安定分布）である。

自然界には様々なフラクタル構造やフラクタル分布（ベキ分布）が存在している。それらの多くは熱平衡からは遠く離れているが、定状的になっているようにみなすことができる。第4の定状状態という新しい概念は、自然界に存在する様々なフラクタルに統一的な見解を提示する可能性を持っているのではないだろうか?

参考文献

1. H.Takayasu, Phys.Rev.Lett.63(1989),2563.

2. H.Takayasu, M.Takayasu, A.Provata and G.Huber, preprint.